Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 12 mars 2007 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-5.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-7 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-17 poäng ger betyg 4 och 18-21 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. De tre homogena stängerna har alla längden l och massan m. De är sammansvetsade och upphängda enligt figuren, så att stängerna AB och BC är horisontella medan den tredje stången bildar vinkeln θ med lodlinjen. Bestäm spännkrafterna i de tre vertikala linorna som fäster i punkterna A, B och C.

2. Den statiska friktionskoefficienterna vid A och B är $\mu_s = 0.25$. Vad är det största värdet på kraften P för vilket den homogena cylindern med massan m kan vara i jämvikt? På vilket sätt rör sig cylindern om P ökas ytterligare?

3. En projektil skjuts ut med hastigheten $\mathbf{u}$ som har storleken u och bildar vinkeln θ med horisontalplanet, och rör sig därefter under inflytande av tyngdkraften. Bestäm krökningsradien ρ för banan i dess högsta punkt.

4. Systemet bestående av vagnen med massan $6m$ och kulan med massan m släpps i vila i det avbildade läget. Bestäm kulans hastighet *relativt vagnen* i det ögonblick då stången med längden l är vertikal. (Stången vrider sig fritt kring A. Vagnen rör sig friktionslöst.)

5. Systemet påverkas av kraften $F = F_0 \sin \omega t$. För vilket värde på ω uppstår resonans?

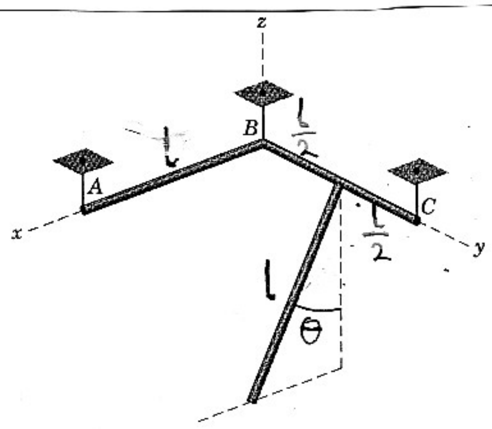
Överkursuppgifter

6. Lasten per längdenhet w växer linjärt från O till värdet $w_{\max}$ i den vänstra ändpunkten. På vilket avstånd från O är böjmomentet M i balken maximalt?

7. Ovanpå vattnet (densitet ρ_{vatten}) ligger ett oljeskikt (densitet ρ_{olja}) med tjocklek d. En kub av trä (densitet $\rho_{\text{trä}}$) med sidlängden D flyter enligt figuren. Bestäm höjden h. (Det gäller att $\rho_{\text{trä}} < \rho_{\text{olja}} < \rho_{\text{vatten}}$.)

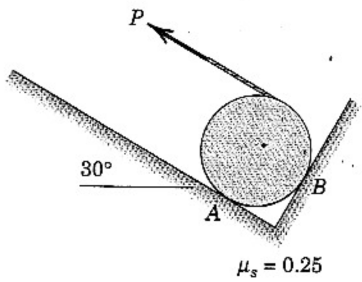
Lycka till!

1.



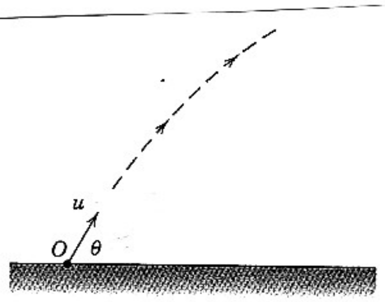
z
B
A
C
x
y
l
$\frac{l}{2}$
$\frac{l}{2}$
l
θ

2.



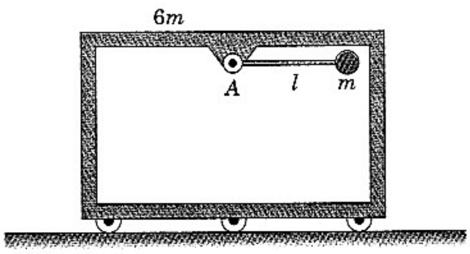
P
30°
A
B
$\mu_s = 0.25$

3.



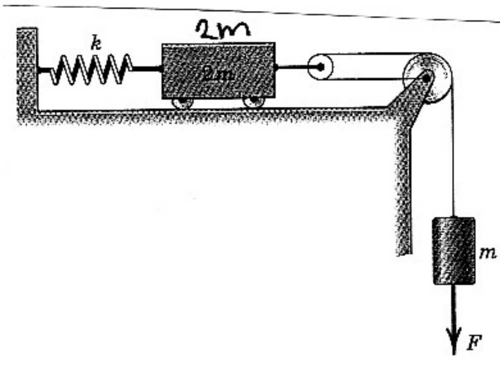
u
O
θ

4.



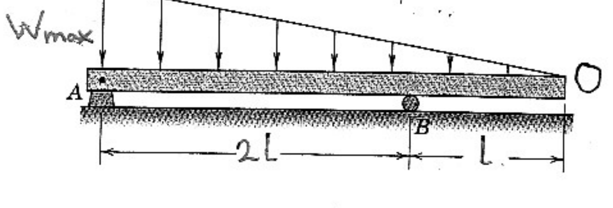
6m
A
l
m

5.



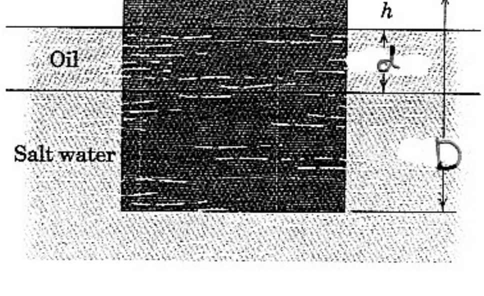
k
2m
2m
m
F

6.



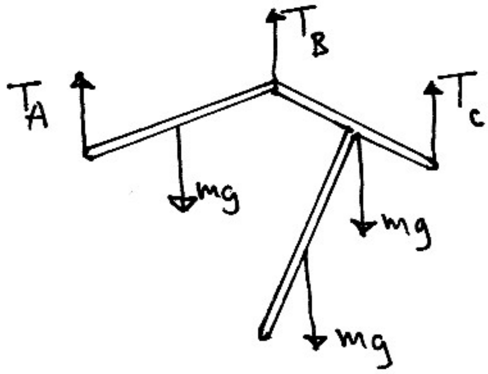
Wmax
A
O
B
2l
l

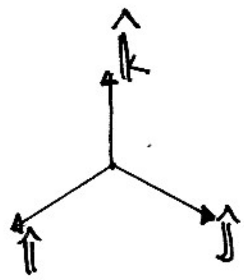
7.



h
d
D
Oil
Salt water

1. Frilägg hela konstruktionen:





Kraftjämvikt och momentjämvikt kring B ger

$$0 = (T_A + T_B + T_c - 3mg)\hat{k}$$

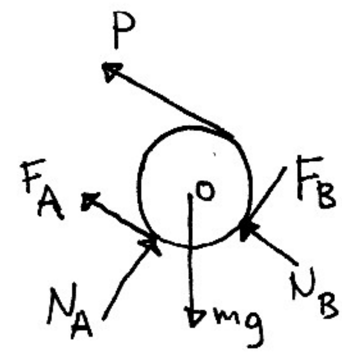
$$\begin{aligned}0 &= l\hat{\imath} \times T_A\hat{k} + l\hat{\jmath} \times T_c\hat{k} \\ &\quad + \frac{l}{2}\hat{\imath} \times (-mg\hat{k}) + \frac{l}{2}\hat{\jmath} \times (-mg\hat{k}) + \left(\frac{l}{2}\hat{\jmath} + \frac{l}{2}\sin\theta\,\hat{\imath} - \frac{l}{2}\cos\theta\,\hat{k}\right) \times (-mg\hat{k}) \\ &= \hat{\imath}\left(lT_c - mgl\right) + \hat{\jmath}\left(-lT_A + mgl\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\right)\right)\end{aligned}$$

Varur fås att

$$\begin{cases} T_A = mg\dfrac{1+\sin\theta}{2} \\ T_B = mg\dfrac{3-\sin\theta}{2} \\ T_c = mg \end{cases}$$

2. Frilägg cylindern;

och ställ upp jämviktsekvationerna:



$$
\begin{cases}
\nwarrow: & P + F_A + N_B - mg\sin 30^\circ = 0 \\
\nearrow: & N_A - F_B - mg\cos 30^\circ = 0 \\
\curvearrowleft O: & r(P - F_A - F_B) = 0
\end{cases}
$$

r = cylinderns radie

Antag först att cylindern lyfter från underlaget i B. Då gäller att

$$
\begin{cases}
F_B = 0 \\
N_B = 0
\end{cases}
$$

Varur fås att

$$
\begin{cases}
N_A = mg\cos 30^\circ \\
F_A = mg\dfrac{\sin 30^\circ}{2} \\
P = mg\dfrac{\sin 30^\circ}{2}
\end{cases}
\Rightarrow \frac{F_A}{N_A} = \frac{1}{2}\tan 30^\circ > \mu
$$

Friktionsvillkoret är alltså inte uppfyllt och antagandet var felaktigt.

Antag istället att cylindern roterar kring O:

$$
\begin{cases}
F_A = \mu N_A \\
F_B = \mu N_B
\end{cases}
$$

Varur fås att

$$
P = mg\mu\frac{(1+\mu)\sin 30^\circ + (1-\mu)\cos 30^\circ}{1 + \mu + 2\mu^2} \approx 0{,}23\, mg
$$

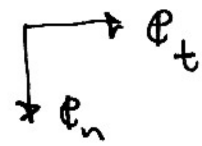
3. Hastigheten $v_x = u\cos\theta$ i horisontalled är konstant.

I banans högsta punkt är hastigheten i vertikalled $v_y = 0$ och farten är

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x = u\cos\theta$$

I den punkten är accelerationen

$$a = \frac{v^2}{\rho} e_n + \dot{v} e_t$$



$$= g e_n$$

Varur fås krökningsradien

$$\rho = \frac{v^2}{g} = \frac{(u\cos\theta)^2}{g}$$

4. Beteckna vagnens respektive kulans hastighet med v respektive v'. (åt höger.)

Systemet påverkas bara av tyngdkraften och normalkraften från underlaget.

Dessa uträttar inget arbete och har ingen komponent i horisontalled.

Alltså är den totala mekaniska energin och rörelsemängden i horisontalled konstanta.

Detta ger ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{1}{2} 6m v^2 + \frac{1}{2} m v'^2 = mgl \\ 6mv + mv' = 0 \end{cases}$$

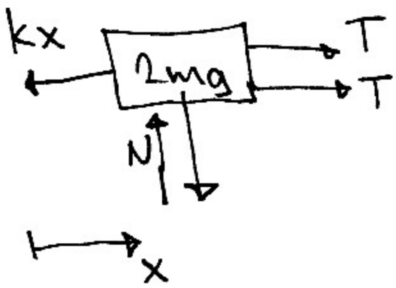
Varur fås att

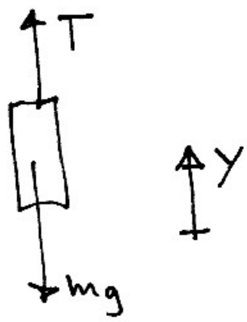
$$\begin{cases} v = \sqrt{\frac{gl}{21}} \\ v' = -6\sqrt{\frac{gl}{21}} \end{cases}$$

Den relativa hastigheten är

$$v_{rel} = v - v' = \sqrt{\frac{7}{3} gl}$$

5. Frilägg vagnen och vikten separat:





Newtons andra lag ger

$$\rightarrow: \quad 2T - kx = 2m\ddot{x}$$

$$\uparrow: \quad T - mg = m\ddot{y}$$

Dessutom har vi tvångsvillkoret

$$2x + y = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

Härur fås differentialekvationen

$$6m\ddot{x} + kx = 2mg$$

med den karaktöristiska vinkelfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{6m}}$$

Om F har denna vinkelhastighet uppstår resonans

6. Den totala lasten är

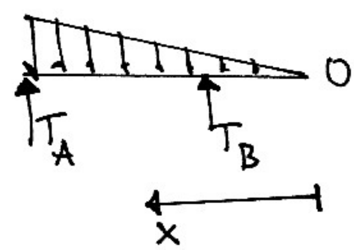
$$R = \int_0^{3L} w_{max} \frac{x}{3L}\, dx = \frac{3}{2} w_{max} L$$

och dess vridmoment m a p den högra ändpunkten är

$$M_H = \int_0^{3L} w_{max} \frac{x}{3L}\, x\, dx = w_{max} 3L^2$$

Reaktionskrafterna T_A och T_B skall alltså uppfylla

$$\begin{cases} T_A + T_B = R \\ 3L\, T_A + L\, T_B = M_H \end{cases}$$



Varur fås att

$$\begin{cases} T_A = \frac{3}{4} w_{max} L \\ T_B = \frac{3}{4} w_{max} L \end{cases}$$

M är maximalt $\Rightarrow$ $\frac{dM}{dx} = V = 0$ där skjuvspänningen V ges av (på avståndet x' från 0)

$$V = \int_0^{x'} w_{max} \frac{x}{3L}\, dx - \frac{3}{4} w_{max} L = w_{max} \frac{x'^2}{6L} - \frac{3}{4} w_{max} L$$

$V = 0$ ger alltså $x' = \sqrt{\frac{18}{4}}\, L = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}} L}}$

7. Trycket på kubens undersida är

$$p = \rho_{olja}\, g\, d + \rho_{vatten}\, g\, (D - d - h)$$

Kraftjämvikt för kuben ger att

$$p D^2 - \rho_{trä} D^3 g = 0$$

vilket ger att

$$\rho_{olja}\, d + \rho_{vatten} (D - d - h) - \rho_{trä} D = 0$$

Härur fås

$$h = D - d - \frac{D \rho_{trä} - d \rho_{olja}}{\rho_{vatten}}$$